

Gruppenübung 11

Diffeomorphismen

Eine Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt *globaler Diffeomorphismus* wenn

- f invertierbar ist und
- sowohl f als auch f^{-1} unendlich oft differenzierbar sind.

Um zu überprüfen ob eine Abbildung ein globaler Diffeomorphismus ist, ist folgende Charakterisierung hilfreich [1]:

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist genau dann ein Diffeomorphismus wenn

- f unendlich oft differenzierbar ist,
- die Jacobimatrix von f an allen Stellen $x \in \mathbb{R}^n$ invertierbar ist und
- $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \|f(x)\| = \infty$.

Aufgabe 1 Gegeben sei das System

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 - (x_1 + x_2)^2 \\ x_1 + (x_1 + x_2)^2 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$y = x_2.$

a) Bestimmen Sie den relativen Grad des Systems.

Lösung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h(x)}{\partial x} &= (0 \quad 1 \quad 0) \\ L_g h(x) &= 0 \\ L_f h(x) &= x_1 + (x_1 + x_2)^2 \\ \frac{\partial (L_f h)(x)}{\partial x} &= (1 + 2(x_1 + x_2) \quad 2(x_1 + x_2) \quad 0) \\ L_g L_f h(x) &= 1 + 2(x_1 + x_2) \end{aligned}$$

D.h. das System hat einen wohldefinierten relativen Grad $r = 2$ für alle (x_1, x_2) mit $x_1 + x_2 \neq -\frac{1}{2}$.

b) Bestimmen Sie eine glatte Koordinatentransformation auf Byrnes-Isidori-Normalform und erklären Sie ob es sich um eine globale Transformation handeln kann.

Lösung:

Wir suchen eine glatte Koordinatentransformation $\Phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Bezeichne die neuen Koordinaten mit z , d.h. wir setzen $z = \Phi(x)$. Aus a) und der Vorlesung folgt unmittelbar

$$\begin{aligned} z_1 &= \Phi_1(x) = x_2 \\ z_2 &= \Phi_2(x) = x_1 + (x_1 + x_2)^2. \end{aligned}$$

Es gilt nun $\Phi_3(x)$ so zu wählen, dass die Jacobimatrix von Φ nichtsingulär ist. Genauer, die Jacobimatrix ist mit obiger Wahl von Φ_1 und Φ_2 gegeben durch

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 + 2(x_1 + x_2) & 2(x_1 + x_2) & 0 \\ \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_1} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_2} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

Die Determinante dieser Matrix ist gegeben durch

$$\det \frac{\partial \Phi}{\partial x} = -(1 + 2(x_1 + x_2)) \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_3}.$$

D.h. unabhängig davon wie Φ_3 gewählt wird, ist die Jacobimatrix singulär für $x_1 + x_2 = -\frac{1}{2}$, womit wir sicherlich keine globale glatte Transformation erhalten können. Allerdings erhält man einen lokalen Diffeomorphismus für alle $x \in \mathbb{R}^3$ für die $x_1 + x_2 \neq -\frac{1}{2}$ gilt genau dann, wenn $\frac{\partial \Phi_3}{\partial x_3} \neq 0$, also z.B. $\Phi_3(x) = x_3$ gilt.

Aufgabe 2 Gegeben sei das System

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + (x_1 + x_2)x_3 + (1 + x_1^2)u \\ \dot{x}_3 &= x_1 u \\ y &= x_1.\end{aligned}$$

- a) Bestimmen Sie den relativen Grad r des Systems und transformieren Sie das System in Byrnes-Isidori-Normalform.

Lösung:

Da das System bereits in Byrnes-Isidori-Normalform vorliegt, liest man den relativen Grad $r = 2$ einfach ab.

- b) Bestimmen Sie eine Zustandsrückführung $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ sowie Anfangsbedingungen so dass $y(t) \equiv 0$.

Lösung:

Soll $y(t) \equiv 0$ gelten, muss $x_1(0) = 0$ sein. Weiterhin muss auch $\dot{y}(t) \equiv 0$, und damit $\dot{x}_1(t) \equiv 0$ gelten. Daraus folgt unmittelbar $x_2(t) \equiv 0$. D.h. man braucht auch $x_2(0) = 0$. Weiterhin gilt $\dot{x}_2(t) \equiv 0$, womit unmittelbar

$$u(x) = \frac{x_2 - (x_1 + x_2)x_3}{1 + x_1^2}$$

folgt.

- c) Bestimmen Sie die Nulldynamik des Systems und analysieren Sie diese (Ruhelagen, Stabilität).

Lösung:

Die Nulldynamik ist der Teil der Dynamik der verbleibt wenn $y(t) \equiv \dot{y}(t) \equiv \dots \equiv 0$ gilt. Genauer die Lösungen der Differentialgleichung $s(t, x_0)$ (also die Lösung mit Anfangsbedingung x_0) für die gilt $y(t) = h(s(t, x_0)) \equiv 0$. In b) haben wir eine Rückführung und Anfangsbedingungen bestimmt mit denen $y(t) \equiv 0$ gilt. Diese implizieren $x(0) = (0, 0, x_3(0))^T$ mit $x_3(0) \in \mathbb{R}$ und $x_1(t) \equiv 0$ sowie $u(t) \equiv 0$, die verbleibenden Lösungen sind also die Lösungen der Differentialgleichung

$$\dot{x}_3 = 0$$

für $x_3(0) \in \mathbb{R}$. D.h., Lösungen der Form $s(t, x(0)) = (0, 0, x_3(0))^T$ ergeben $y(t) \equiv 0$. Die vorliegende Nulldynamik hat unendlich viele Ruhelagen die alle stabil aber nicht asymptotisch stabil sind.

Aufgabe 3 Gegeben sei das System

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1^3 + x_2 + x_3 - u \\ \dot{x}_2 &= x_1^3 + u \\ \dot{x}_3 &= -x_3 - 2u \\ y &= x_1 + x_2.\end{aligned}$$

- a) Bestimmen Sie den relativen Grad des Systems sowie eine Transformation auf Byrnes-Isidori-Normalform.

Lösung:

$$\begin{aligned}L_g h(x) &= \frac{\partial h(x)}{\partial x} g(x) = (1 \quad 1 \quad 0) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0 \\ L_g L_f h(x) &= L_g (1 \quad 1 \quad 0) \begin{pmatrix} -x_1^3 + x_2 + x_3 \\ x_1^3 \\ -x_3 \end{pmatrix} = L_g (x_2 + x_3) = (0 \quad 1 \quad 1) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = -1.\end{aligned}$$

Damit ergibt sich ein relativer Grad von $r = 2$.

Für die Transformation auf Byrnes-Isidori-Normalform gilt

$$\begin{aligned} z_1 &= \Phi_1(x) = h(x) = x_1 + x_2 \\ z_2 &= \Phi_2(x) = L_f h(x) = x_2 + x_3. \end{aligned}$$

Damit die Transformation Φ ein Diffeomorphismus ist, muss

$$\det \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_1} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_2} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \neq 0,$$

also

$$\frac{\partial \Phi_3}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_3} - \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_2} \neq 0.$$

Dies ist zum Beispiel für

$$\Phi_3(x) = 2x_2 + x_3$$

erfüllt. Dabei wurde Φ_3 gezielt so gewählt, dass die sich ergebende Byrnes-Isidori-Normalform eingangsnormalisiert ist.

Die Inverse Transformation ergibt sich zu

$$\begin{aligned} x_2 &= \dots = z_3 - z_2 \\ x_1 &= z_1 - x_2 = z_1 + z_2 - z_3 \\ x_3 &= z_2 - x_2 = 2z_2 - z_3. \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \dot{x}_1 + \dot{x}_2 = x_2 + x_3 = z_2 \\ \dot{z}_2 &= \dot{x}_2 + \dot{x}_3 = x_1^3 - x_3 - u = (z_1 + z_2 - z_3)^3 - 2z_2 + z_3 - u \\ \dot{z}_3 &= 2\dot{x}_2 + \dot{x}_3 = 2x_1^3 - x_3 = 2(z_1 + z_2 - z_3)^3 - 2z_2 + z_3. \end{aligned}$$

- b) Bestimmen Sie eine Zustandsrückführung $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ sowie Anfangsbedingungen so dass $y(t) \equiv 0$.

Lösung:

Um $y(t) \equiv 0$ zu erreichen, muss $y(t) = x_1(t) + x_2(t) = 0$ gelten. Weiterhin gilt $\dot{y}(t) \equiv 0$, d.h.

$$\dot{x}_1(t) + \dot{x}_2(t) \equiv -x_1^3(t) + x_2(t) + x_3(t) - u(t) + x_1^3(t) + u(t) = x_2(t) + x_3(t) \equiv 0,$$

also muss auch $x_2(t) + x_3(t) = 0$ gelten. Schließlich folgt aus $\ddot{y}(t) \equiv 0$, dass

$$\dot{x}_2(t) + \dot{x}_3(t) \equiv x_1^3(t) - x_3(t) - u(t) \equiv 0.$$

D.h. wenn wir $u = -x_3 + x_1^3$ und die Anfangsbedingungen zu $(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = (\alpha, -\alpha, \alpha)$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$ wählen, dann ist $y(t) \equiv 0$.

Man kann dasselbe Ergebnis erhalten, wenn man die Bedingungen für $y(t) \equiv 0$ in den Koordinaten der Byrnes-Isidori-Normalform aufstellt, d.h. $z_1(t) \equiv z_2(t) \equiv 0$. Durch Einsetzen der Transformation erhält man die Bedingungen in den ursprünglichen Koordinaten.

- c) Bestimmen Sie die Nulldynamik des Systems und analysieren Sie diese (Ruhelagen, Stabilität).

Lösung:

Da der relative Grad $r = 2$ ist, hat der Zustandsraum der Nulldynamik die Dimension 1. Durch Einsetzen der Bedingungen $x_1 + x_2 = 0$, $x_2 + x_3 = 0$ und $u = -x_3 + x_1^3$ in die Systemgleichungen ergibt sich die Nulldynamik zu

$$\dot{x}_3 = x_3 - 2x_3^3.$$

D.h. die Nulldynamik hat drei Ruhelagen bei $0, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$. Die Ruhelage bei 0 ist instabil, die Ruhelagen $\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ sind stabil.

Ist das System in einer eingangsnormalisierten Byrnes-Isidori-Normalform gegeben, so kann man die Nulldynamik erhalten indem man $z_1 = \dots = z_r = 0$ in die Differentialgleichungen für z_{r+1} bis z_n einsetzt. Dies ist oft einfacher als die Bestimmung der Nulldynamik in Originalkoordinaten. Allerdings ist die Bestimmung einer eingangsnormalisierten Byrnes-Isidori-Normalform oft auch aufwändig.

Für das System in diese Aufgabe erhält man nach Einsetzen von $z_1 = z_2 = 0$ in die dritte Differenzialgleichung

$$\dot{z}_3 = z_3 - 2z_3^2$$

für die Nulldynamik, also dieselbe Gleichung wie in Originalkoordinaten. Dies muss aber nicht zwangsweise so sein; je nach Wahl der Transformation Φ können die Gleichungen der Nulldynamik in transformierten Koordinaten anders aussehen. Stabilitätsaussagen bleiben jedoch unter Diffeomorphismen erhalten.

Aufgabe 4 Gegeben Sei das System

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= 2x_1 + 3x_2 + u \\ y &= x_1 + x_2.\end{aligned}$$

Prüfen Sie, ob das System beobachtbar ist und bestimmen Sie anschließend den relativen Grad und die Nulldynamik des Systems.

Lösung:

Die Beobachtbarkeit überprüft man mit Hilfe der Beobachtbarkeitsmatrix, d.h.

$$\begin{pmatrix} c^T \\ c^T A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Diese hat vollen Rang und deswegen ist das System beobachtbar.

Es gilt $y = h(x)$ mit

$$L_g h(x) = 1,$$

damit ist der relative Grad $r = 1$.

Um die Nulldynamik zu bestimmen lösen wir zuerst das output-zeroing problem, d.h. wir bestimmen u so, dass $y(t) \equiv 0$ gilt. Für $y(t) \equiv 0$ muss $x_1(t) + x_2(t) \equiv 0$ gelten, d.h. $x_1(0) + x_2(0) = 0$. Weiterhin $\dot{x}_1(t) + \dot{x}_2(t) \equiv 0$ und damit

$$0 \equiv 2x_1(t) + 4x_2(t) + u(t)$$

d.h. wir müssen $u = -2x_1 - 4x_2$ wählen. Setzt man diese Rückführung in die Differentialgleichung ein, so erhält man

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2.\end{aligned}$$

Nach Einsetzen der Bedingung $x_1 + x_2 = 0$ ergibt sich die Nulldynamik zu

$$\dot{x}_2 = -x_2.$$

Damit ist die Nulldynamik asymptotisch stabil.

Literatur

- [1] Wu, Felix and Desoer, Charles, Global inverse function theorem, IEEE Transactions on Circuit Theory, 1972, Volume 19, Number 2, 199–201.